Corrigé des exercices du livre 191 p.270, 118 p.276 et 123 p. 277

91 $\mathscr{P}_1$: $y = 2(x-1)^2 - 3$

$\mathscr{P}_2$: $y = -3(x+2)^2 + 4$

118 **a.** Une équation de l'axe de symétrie de la parabole est $x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{-0{,}04} = -125$

Or $\frac{140}{2} = 70$.

Une équation de (AB) est : $x = -125 - 70 = -195$.

Une équation de (CD) est $x = -125 + 70 = -55$.

b. On calcule $f(-125) = 22{,}5$.

Le sol peut être assimilé à une droite d'équation $22{,}5 - 250 = -227{,}5$.

On calcule les coordonnées des points de la paraboles et des droites (BA) et (CD).

Si $x = -55$ alors $y = -75{,}5$ donc C(-55 ; $-75{,}5$) et D(-55,$-227{,}5$).

Donc la hauteur AB $= -75{,}5 - (-227{,}5)$

$= 152$ cm $= 1{,}52$ m.

123 **1. a.** On résout le système :

$\begin{cases} y = 0{,}5x2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ donc A(2 ; 2).

b. $f(x) = 0{,}5\,x^2$ donc $f'(x) = x$.

La tangente au point A à la parabole a pour équation :

$y = f'(2)(x-2) + f(2) \Leftrightarrow y = 2(x-2) + 2$

$\Leftrightarrow y = 2x - 2$

$\Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$

Un vecteur directeur de la tangente est (1 ; 2).

La normale a pour équation $x + 2y + c = 0$ avec $2 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$.

La normale a pour équation $x + 2y - 6 = 0$.

c. On considère le point B(2 ; 4) qui se trouve sur (*d*).

On cherche le symétrique de ce point par rapport à la normale.

Soit H le projeté orthogonal de B sur (*d*), on obtient H(1,2 ; 2,4).

On cherche J sur le rayon réfléchi tel que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HJ}$.

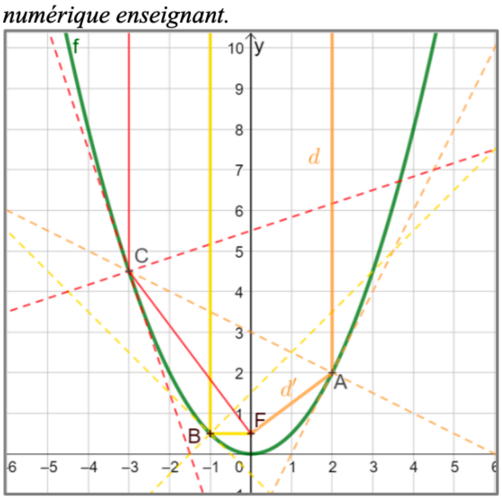
On obtient J(0,4 ; 0,8).

Ainsi le rayon réfléchi passe par les points A et J. Son équation est donc $3x - 4y + 2 = 0$.

d. On résout $\begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

donc F(0 ; $-\frac{1}{2}$).

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



Conjecture : Tous les rayons réfléchis passent par ce point F.

3. On fait le même raisonnement dans le cas général. On résout le système :

$\begin{cases} y = 0{,}5x^2 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 0{,}5a^2 \end{cases}$

donc A(a ; $0{,}5a^2$).

$f(x) = 0{,}5x^2$ donc $f'(x) = x$.

La tangente au point A à la parabole a pour équation :

$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = a(x-a) + 0{,}5a^2$

$\Leftrightarrow y = ax - 0{,}5a^2$

$\Leftrightarrow ax - y - 0{,}5a^2 = 0$.

Un vecteur directeur est (1 ; a).

La normale a pour équation $x + ay + c = 0$

avec $a + 0{,}5a^3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - 0{,}5a^3$.

La normale a pour équation $x + ay - a - 0{,}5a^3 = 0$.

Un vecteur directeur de la normale est $\vec{u}\,(-a\,;\,1)$.

Soit H $(x_H;\ y_H)$ le projeté orthogonal d'un point B(a ; 1) du rayon de soleil (*d*) sur la normale.

Alors $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow -a(x_H - a) + (y_H - 1) = 0$

donc $y_H = ax_H + 1 - a^2$.

Or H est sur la normale donc ses coordonnées vérifient le système :

$\begin{cases} y_H = ax_H + 1 - a^2 \\ x_H + ay_H - a - 0{,}5a^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{1.5a^3}{1+a^2} \\ y_H = \frac{1+0.5a^4}{1+a^2} \end{cases}$

Soit J le symétrique de B par rapport à la normale : on a $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HJ}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 2x_H - x_B = \frac{a^3-2a}{1+a^2} \\ y_J = 2y_H - y_B = \frac{1-a^2+a^4}{1+a^2} \end{cases}$

On détermine une équation du rayon réfléchi [AJ] :

M (x ; y) un point de la droite (AJ)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - a & \frac{-2a+a^3}{1+a2} \\ y - 0{,}5a^2 & \frac{1-1.5a^2+0.5a^4}{1+a2} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)(1 - 1.5a^2 + 0.5a^4) - (y - 0{,}5a^2)(-2a + a^3) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - 1{,}5a^2 + 0{,}5a^4)x + (2a - a^3)y - a + 0{,}5a^3 = 0$

On cherche les coordonnées du point d'intersection avec la droite d'équation $x = 0$.

On obtient : $y = \frac{a-0.5a^3}{2a^2-a^3} = \frac{1}{2}$, donc chaque rayon passe par F(0 ; $\frac{1}{2}$).